

# पहिला दिवस

## असंख्य संख्या!

साई कुलकर्णी यांनी भाषांतरित केले || अशनी दासगुप्ता यांनी लिहिलेले

१, २, ३, ४, ...

संख्या खरोखर असंख्य आहेत. एकदा सुरु झाल्या की क्रमाक्रमाने वाढतच राहतात.

१ आणि १ जोडले की दोन होतात. २ ला परत १ जोडला की तीन. असे एक-एक पाऊल पुढे टाकत-टाकत किती लाख, कितीतरी कोटी-कोटी संख्या आपल्याला मागे टाकता येतात, ह्याला काही मर्यादा नाहीत.

ह्या विस्तीर्ण जंगलात काही संख्या आहेत थोड्या मत्सरी स्वभावाच्या. ह्यांना म्हणतात मूळ संख्या. ह्यांना भाग जायला मुळीच आवडत नाही.

जसे, २, ३, ५, ७, ... २०१७, ...

मूळ संख्यांना भागायचा प्रयत्न केल्यास पेचात पडाल. ह्या फक्त १ ने व स्वतःनेच भाग जाऊ शकतात. ह्या व्यतिरिक्त मूळ संख्यांना कोणीच ताब्यात ठेवू शकत नाही!

१.१

पहिल्या २५ मूळ संख्या शोधा व एकामागोमाग एक लिहून काढा.

१.२

१ पासून १००० पर्यंत किती मूळ संख्या आहेत?

१ पासून १००० पर्यंत किती मूळ संख्या आहेत हे आपल्याला मोजून शोधून काढता येईल. थोडी मेहनत करावी लागेल, हे मात्र खरे आहे. पण अर्धा तास देऊन जर थोडे परिश्रम केले, तर ह्या प्रश्नाचे उत्तर सापडेल. पण जर मी विचारले, की १ पासून १० कोटी पर्यंत किती मूळ संख्या आहेत, तर? किंवा एक पासून हजार कोटी पर्यंत? मग आपले काम फारच अवघड होईल.

कॉम्प्युटर ला सुद्धा हे करायला खूप वेळ लागेल.

जर्मनीचे गणिती गाउस ह्यांनी खूप लहान वयापासून ह्या विषयावर विचार केला. त्यांच्या सखोल अभ्यासानंतर त्यांनी सांगितले, की १ पासून 'x' पर्यंत  $\frac{x}{\ln x}$  इतक्या मूळ संख्या आहेत. ह्या सूत्राने आपल्या प्रश्नाचे उत्तर शोधणे जरा सोपे झाले, असे म्हणायला हरकत नाही. आपण नंतर कधीतरी हे सूत्र तपासून पाहू. तूर्तास, इतक्या अवघड समस्येबद्दल विचार न करता आपण त्या तुलनेने एका सोप्या प्रश्नाबद्दल विचार करू.

मूळ संख्या सोडल्यास ज्या संख्या उरतात, त्या स्वभावाने कशा आहेत?

त्यांना म्हणतात संयुक्त संख्या.

उदाहरणार्थ, २०. संयुक्त संख्यांना दुसऱ्या संख्यांनी भागता येते. ह्या तितक्या मत्सरी नसतात. २० ला जसे ५ ने आणि १० ने ही भागता येते.

ह्याचे किती विभाजक (divisor) आहेत? हे सगळे विभाजक लहानापासून मोठ्यापर्यंत लिहून काढू.

१, २, ४, ५, १०, २०

काही मुद्दे लक्षात ठेवा:

- २० त्याचा स्वतःचा विभाजक असल्या कारणाने आपण ही संख्या इथे लिहिली आहे. कुठलीही संख्या ही त्याची स्वतःची विभाजक असतेच.
- १ ही संख्या सर्व संख्यांची विभाजक असते.
- २० चे विभाजक आपण कसे काढले? फार अवघड नाही आहे. सुरुवातीला कुठल्याही संख्येने भागायचा प्रयत्न केला. भागली गेली तर चांगलेच आहे, नाहीतर त्याच्या पुढच्या संख्येने भागायचा प्रयत्न केला. अशा प्रकारे, १ पासून २० पर्यंत सगळ्या संख्यांनी २० ला भागून झाल्यावर ज्या संख्यांनी पूर्णपणे भागली गेली, त्या संख्या लिहून काढल्या.

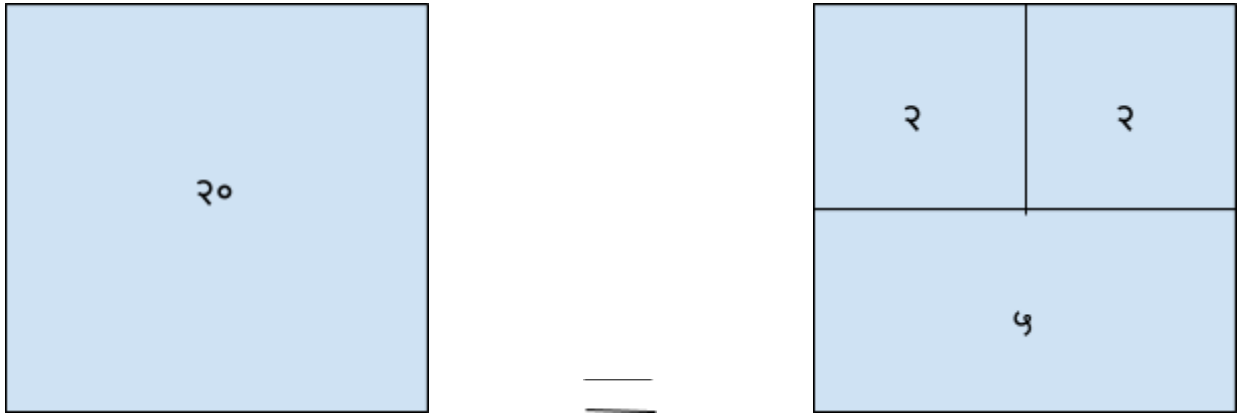
१.३

२०१७, २६, ६४, ५२, २९

ह्या संख्यांचे सर्व विभाजक लहानापासून मोठ्यापर्यंत क्रमाने लिहा.

मूळ संख्या ह्या विटांसारख्या असतात. जसे विटेवर वीट ठेवून इमारत तयार होते, तसेच, मूळ संख्या जोडत-जोडत संयुक्त संख्या बनतात. ह्याचाच अर्थ असा, की कुठल्याही संयुक्त संख्येला काही मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात लिहिले जाऊ शकते.

जसे,  $२० = २ \times २ \times ५ = २^२ \times ५$



विटांचा गुणाकार बरोबर होत आहे ह्याकडे लक्ष द्यावे.

१.४

सिद्ध करा की मूळ संख्या असीम आहेत. शेवटची मूळ संख्या असे काही असू शकत नाही. (युक्लिड)

१.५

सिद्ध करा की वर्गसंख्या (उदा. ४, १६, ३६, ४९) सोडल्यास कुठल्याही संख्येच्या विभाजाकांची सम संख्या असते. (जसे, २० चे सहा विभाजक आहेत: १, २, ४, ५, १०, २०).

१.६

सिद्ध करा की वर्ग संख्यांचे (उदा. ४, २५, ६४, ...) विभाजक संख्येने नेहमी विषम असतात.

संख्यांच्या ह्या महानगरीत मूळ संख्या झाल्या विटा, आणि संयुक्त संख्या झाल्या इमारती. आता ह्या मूळ संख्या ओळखण्यासाठी एखादी भक्कम युक्ती हवी. नाहीतर वीट आणि इमारतीतील फरक कळणे अवघड जाईल.

इरॅटोस्थेनिस हे आलेक्झांड्रियाच्या मोठ्या ग्रंथालयाचे प्रमुख ग्रंथपाल होते. ख्रिस्तपूर्व तिसऱ्या शतकापासून हे ग्रंथालय जगातील सर्वोत्कृष्ट पांडित्याचे घर होते. तेथील प्रमुख ग्रंथपालाची कामगिरी बजावणे ही काही लहानसहान गोष्ट नव्हती.

इरॅटोस्थेनिस ह्यांनी संख्यांच्या ह्या जंगलातून मूळ संख्या ओळखण्यासाठी एक युक्ती सांगितली.

आधी अनेक संख्या एकापाठोपाठ एक लिहून काढा (जितक्या हव्या असतील तितक्या).

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ...

सुरुवातीलाच १ खोडून टाका (गणितींनी खूप विचारविमर्श करून असे ठरवले की १ ला मूळ किंवा संयुक्त, काहीच म्हण्टले जाणार नाही. हे त्यांनी कसे ठरवले? तर, एक व शून्य ह्या विशेष प्रकारच्या संख्या आहेत. ह्यांचा व्यवहार समजून घ्यायचा असल्यास अजून थोडे बीजगणित माहिती असणे गरजेचे आहे. त्यानंतरच ह्याचे कारण आपल्याला कळू शकेल.)

१- २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ...

आता दोन खोडायचा नाही (२ झाली पहिली मूळ संख्या. आणि एकमात्र सम मूळ संख्या), पण २ चे सर्व विभाज्य खोडा. (त्या संख्या २ ने भागल्या जातात, ह्याचा अर्थ त्या मूळ नाहीत).

१- २ ३ ४- ५ ६- ७ ८- ९ ...

२ नंतर लगेच अशी कुठली संख्या आहे जी खोडलेली नाही? ३. म्हणजे ३ झाली मूळ. ३ खोडू नका. पण ३ चे सगळे विभाज्य खोडा.

१- २ ३ ४- ५ ६- ७ ८- ९- ...

(६ दोनदा खोडावा लागला. काही हरकत नाही!)

३ नंतर लगेच अशी कुठली संख्या आहे जी आपण खोडली नाही आहे? ५. ह्याचा अर्थ ५ मूळ संख्या आहे.

असेच पुढे चालू ठेवायचे.

१.७

इरॉटोस्थेनिस ह्यांच्या पद्धतीनुसार १ पासून २०० पर्यंतच्या मूळ संख्या शोधून काढा.

१.८

इरॉटोस्थेनिस ह्यांच्या पद्धतीने आपल्याला मूळ संख्या कशा मिळतात (ज्या संख्या खोडल्या गेल्या नाहीत, त्या मूळ संख्या आहेत, असे आपण का म्हणतो?)

Note:

In the 'Sieve of Eratosthenes', we start with number 2 and cross out every second number and then start with 3 (the uncrossed one) and cross out every third number and start with 5 (the uncrossed one) and cross out every fifth number and so on...