दुसरा दिवस

'बाकी' ची गंमत

साई कुलकर्णी यांनी भाषांतरित केले || अश्नी दासगुप्ता यांनी लिहिलेले

आपण भागाकार शिकलो तेव्हा त्यात उरणाऱ्या 'बाकी' बद्दल ही शिकलो होतो. तुम्हाला आठवतंय ना? आता ह्या बाकी ची एक गंमत बघूया. त्यासाठी आपण एक प्रयोग करून बघू.

१. एक भाजक निवडा. उदा. ९.

२. दोन संख्या निवडा. उदा. ४७ आणि ८४.

३. दोन्ही संख्यांना ९ ने भागले की बाकी किती उरते?

४७ -- ९ ने भागल्यावर बाकी उरते → २ (*)

८४ -- ९ ने भागल्यावर बाकी उरते → ३ (**)

४. आता ४७ x ८४ -- ९ ने भागल्यावर बाकी किती उरेल → ?

थोड्या प्रयत्नानंतर प्रश्न क्रमांक ४ चे उत्तर आपल्याला लगेच मिळू शकते. आधी ४७ व ८४ चा गुणाकार करा. उत्तर येईल ३९४८.

आता ३९४८ ला ९ ने भागा. भागाकार होतो ४३८ आणि बाकी ६.

आता एक गंमत बघा. (*) आणि (**) ह्या दोन्ही ओळींमध्ये उरलेल्या बाकींचा गुणाकार केला तरी उत्तर येते ६! म्हणजे आपण जर दोन्ही वेगवेगळ्या संख्यांमधून उरलेल्या बाकींचा गुणाकार केला असता, तर आपल्याला इतके कष्ट न करताच आपले उत्तर मिळाले असते.

पण हा योगायोग तर नाही ना? हा नियम नेहमी लागू होतो का?

२.१. हाच प्रयोग आता १७ हा आकडा भाजक म्हणून घेऊन करून पहा. कुठल्याही दोन संख्या घेऊन त्यांना १७ ने भागून तशीच गंमत होते का?

आपण आता 'बाकी'च्या ह्या मजेदार स्वभावाचे अजून थोडे बारकाईने निरीक्षण करूया. पण त्या आधी एकदा बघू की आपण अचानक 'बाकी' चा एवढा विचार का करत आहोत.

पहिल्या दिवशी आपण बघितले की संख्या असंख्य आहेत. संयुक्त संख्यांना इमारत आणि मूळ संख्यांना विटा मानून ही फारसा काही फायदा झाला नाही, कारण मूळ संख्या ही असंख्य आहेत (हा हिशोब केलात ना?).

असीम प्रमाणात असणाऱ्या ह्या संख्यांशी गमती-जमती करणे ही काही सोपी गोष्ट नाही. म्हणून आपण संख्यांची वेगवेगळ्या गटांत विभागणी करतो. ही विभागणी करून आपल्याला जर गटांची संख्या कमी करता आली, तर आपले काम सोपे झाले असे म्हणता येईल. ह्या काही गटांच्या माध्यमातून ह्या असंख्य संख्या समजायला सोप्या होऊ शकतात. प्रत्येकाबद्दल वेगवेगळा विचार करायची गरज नाही पडणार.

वर्गीकरण करण्याचे हे काम तुम्ही चालू ठेवा.

सम-विषम झाले एक प्रकारचे गट. सम संख्या जातील एका गटात, विषम संख्या दुसऱ्या गटात.

विचार करून बघा... सर्व संख्या ह्या दोन्हीपैकी एका कुठल्यातरी गटात आहेतच. ज्यांचा २ ने भाग जातो, त्या सम. ज्या पूर्णपणे भागल्या नाही जात, त्या विषम.

आता ह्या विभागांचा आपण अजून थोडा अभ्यास करू.

कुठल्याही संख्येला २ ने भागले तर बाकी उरेल एकतर ० (जर ती संख्या पूर्णपणे भाग जात असेल तर), नाहीतर १.

बाकी ० = सम

बाकी १ = विषम

२.२. मग ० कुठल्या गटात आहे? सम का विषम?

आता बघा: आपण २ च्या आधारावर जसे सर्व संख्यांचे दोन गटांत वर्गीकरण केले होते (कारण बाकी दोन प्रकारचे असतात), तसेच ३ च्या आधारावर आपण सर्व संख्यांची तीन गटांत विभागणी करू शकतो.

कुठलीही संख्या ३ ने भागली तर ३ प्रकारचे बाकी उरतात: ०, १, २. ह्या आधारावर आपण सगळ्या संख्यांची तीन गटांमध्ये विभागणी करू शकतो.

गटांची नावे आपण खालीलप्रमाणे ठेवू:

बाकी ० = गुलाम

बाकी १ = राणी

बाकी २ = राजा.

३४ ही संख्या कुठल्या गटात येईल? ३४ ला ३ ने भागले तर बाकी उरते १ (३४ = ३ x ११ + १). ह्याचा अर्थ ३४ आहे राणीच्या गटात.

२.३. राजाच्या गटातील पहिल्या दहा धन (positive) संख्या कोणत्या आहेत?

२.४. सिद्ध करा की दोन गुलाम संख्यांची बेरीज केली किंवा गुणाकर केला तर आपल्याला अजून एक गुलाम संख्या मिळते.

२.५. दोन राजा संख्यांचा गुणाकार केल्यास अजून एक राजा संख्या मिळेल का?

आता हळू-हळू लक्षात येईल की 'बाकी' बद्दल जाणून घेणे आवश्यक का आहे. हे माहिती असले तर संख्या कोणत्या गटात आहे हे आपल्याला कळू शकते.

२.६. चार च्या आधारावर सगळ्या संख्यांचे चार गटांत वर्गीकरण करा. प्रत्येक गटातील पहिल्या ७ ऋण (negative) संख्या लिहून काढा.

आता खरा प्रश्न असा आहे, की दोन संख्यांचा गुणाकार केला की बाकींचा पण गुणाकार का होतो? (आपण केलेला प्रयोग लक्षात आहे ना?)

अजून एक प्रयोग करून बघू.

भाजक: १४

दोन संख्या: ४६, ७२

४६ -- १४ ने भागाकार केला की --- ४ (बाकी)

७२ -- १४ ने भागाकार केला की --- x २ (बाकी)

----

४६ x ७२ -- १४ ने भागाकार केला की ८ (बाकी उरायला पाहिजे, जर आपण बाकींच्या गुणाकाराबद्दल काढलेला निष्कर्ष बरोबर असेल तर).

४६ आणि ७२ चा गुणाकार केला तर उत्तर मिळते ३३१२. ३३१२ ला १४ ने भागल्यास भागाकार येतो २३६. **आणि बाकी ८! आपण जो अंदाज लावला होता, बरोबर तसेच.**

आता गणितातील एक विशेष युक्ती सांगतो. विख्यात गणिती तादाशी तोकीएदा हे एकदा म्हणाले होते की गणित करतांना नेहमी 'अनुमान' करायचा प्रयत्न करावा, की इथे काय होत आहे आणि काय होऊ शकते (एखाद्या यंत्रासारखे नुसते सूत्र वापरणे किंवा पटापट बेरीज आणि गुणाकार करणे म्हणजे गणित नव्हे). आणि आपण लावलेला अंदाज आत्मविश्वासाने सगळ्यांना सांगावा. ह्याने होईल असे, की तो तर्क युक्तिवादाने तपासून पाहावा, असे तुम्हाला नक्की वाटेल.

म्हणून,

1. नेहमी अनुमान करावा.
2. संपूर्ण गणित मांडता नाही आले तरी छोटी-छोटी मॉडेल्स बनवून प्रयोग करत राहावेत (जसे आपण इथे करत आहोत). अर्थात, गणिती त्यांचे सगळे प्रयोग वही-पेनाने करतात. पण म्हणून ते काही कमी चित्ताकर्षक नसतात.

उदाहरणार्थ, आपण आपल्या प्रयोगांवरून असा तर्क करत आहोत की 'बाकी' चा एक विलक्षण मजेदार गुण आहे: संख्यांचा गुणाकार झाला की त्यांचा ही गुणाकार होतो. पण हे दर वेळेस खरे असते की नाही हे आपण अजून सिद्ध नाही केलेले. जोपर्यंत हे आपण प्रत्यक्ष सिद्ध करत नाही, तोपर्यंत वेगवेगळ्या संख्या आणि भाजक घेऊन ही परीक्षा आपल्याला करत रहायला हवी. मगच आपल्याला कळेल की नक्की इथे काय होत आहे.

शेवटचा प्रयोग आपण परत एकदा करून बघूया, पण ह्या वेळेस संख्या थोड्या बदलूया.

भाजक: १४

दोन संख्या: ५०, ७२

५० --- १४ ने भागाकार केला की --- ८ (बाकी)

७२ --- १४ ने भागाकार केला की --- x २ (बाकी)

----

५० x ७२ --- १४ ने भागाकार केला की १६ (बाकी उरायला पाहिजे, जर आपण बाकींच्या गुणाकाराबद्दल काढलेला निष्कर्ष बरोबर असेल तर).

पण असे कसे होईल? कुठल्याही संख्येचा १४ ने भागाकार केला तर बाकी १४ पेक्षा जास्त उरू शकते का? कधीच नाही. मग आपला नियम ह्या परिस्थितीत निरुपयोगी ठरला का?

अगदी तसे नाही. दोन्ही बाकींचा गुणाकार केल्यावर आपल्याला जे उत्तर मिळाले (१६), त्याचा परत १४ ने भागाकार करा. ह्या वेळेस बाकी उरते २.

इकडे ५० व ७२ चा गुणाकार केला की उत्तर येते ३६००. त्याला १४ ने भागले की भागाकार होतो २५७ आणि बाकी उरले २ (जसे आपल्याला हवे आहे).

इतके प्रयोग करून आपल्याला जे समजले ते आता आपण सूत्राच्या स्वरुपात मांडूया.

प्रमेय १.१

a आणि b आहेत कोणत्याही दोन संख्या. d आहे एक भाजक. जर a ला d ने भागल्यावर R_1 बाकी उरत असेल, आणि b ला d ने भागल्यावर R_2 बाकी उरत असेल, तर $a \times b$ ला d ने भागल्यावर बाकी उरेल

1. **$R_1 \times R_2$, जर ह्या बाकींचा गुणाकार d पेक्षा कमी असेल तर.**
2. **जर $R_1 \times R_2$ d पेक्षा जास्त असेल, तर $R_1 \times R_2$ चा परत d ने भागाकार करावा लागेल.**

हे प्रमेय सिद्ध करणे मुळीच अवघड नाही आहे. परंतु आपल्याला हे बैजिक पद्धतीने लिहून काढायला हवे.

त्या आधी एक छोटी गणना करून घ्या:

२.७ सिद्ध करा की जर संख्या M ला d ने भागल्यावर भागाकार येत असेल Q आणि बाकी उरत असेल R, तर आपण हे पुढीलप्रमाणे मांडू शकतो: $M = d \times Q + R$; म्हणजेच,

भाज्य = (भाजक x भागाकार) + बाकी

एकंदरीत पाहता, आपण असे म्हणू शकतो की **a** ला **d** ने भागल्यावर आपल्याला एक भागाकार मिळेल. आपण धरून चालू की तो भागाकार आहे Q_1. मग आपण लिहू शकतो:

$a = d \times Q_1 + R_1$

तसेच, आपण लिहू शकतो:

$b = d \times Q_2 + R_2$

मग,

$a \times b = (dQ_1 + R_1) \times (dQ_2 + R_2) = d^2Q_1Q_2 + dQ_1R_2 + dQ_2R_1 + R_1R_2$

म्हणून,

$a \times b = d(dQ_1Q_2 + Q_1R_2 + Q_2R_1) + R_1R_2$ ... (समीकरण १)

आता, $a \times b$ ला **d** ने भागल्यावर समीकरण १ सारखे एक समीकरण आपल्याला मिळेल: $a \times b = dQ + R$ ... (समीकरण २)

(१) आणि (२) एकत्र केल्यावर आपल्याला कळेल, की

$R_1 \times R_2$ **d** पेक्षा कमी असल्यास तेच असेल **R** (बाकी). आणि जर तसे नसेल, तर $R_1 \times R_2$ ला **d** ने भागल्यावर आपल्याला बाकी मिळेल.

(प्रमाण (अ) समाप्त)

२.८. प्रमेय १ सिद्ध करतांना आपण बऱ्याच पायऱ्या गाळल्या आहेत. त्या पूर्ण करा.

२.९. १० ला ९ ने भागल्यावर बाकी उरते १. मग १० x १० ला ९ ने भागल्यावर बाकी किती उरेल, हे प्रमेय १.१ च्या सहाय्याने शोधून काढा.

२.१०. १०^{२०१७} ला ९ ने भागल्यावर बाकी किती उरेल?