तिसरा दिवस

कॉन्ग्रूएन्सी व समानता

साई कुलकर्णी यांनी भाषांतरित केले || अश्नी दासगुप्ता यांनी लिहिलेले

आपण मागच्या वेळेस केलेली संख्यांची विभागणी लक्षात आहे ना?

- २ च्या आधारावर सर्व संख्यांची दोन गटात विभागणी करता येईल:
    - सम - अशा संख्या ज्यांना २ ने भागल्यावर बाकी उरते ०
    - विषम - अशा संख्या ज्यांना २ ने भागल्यावर बाकी उरते १
- ३ च्या आधारावर सर्व संख्यांची ३ गटात विभागणी करता येईल:
    - गुलाम - अशा संख्या ज्यांना ३ ने भागल्यावर बाकी उरते ०
    - राणी - अशा संख्या ज्यांना ३ ने भागल्यावर बाकी उरते १
    - राजा - अशा संख्या ज्यांना ३ ने भागल्यावर बाकी उरते २

ह्याचे आपण दुसऱ्या दिवशी बारकाईने निरीक्षण केले होते.

जर्मनीचे गणिती गाउस ह्यांनी १८व्या शतकाच्या सुरुवातीला ह्या विषयावर खूप अभ्यास करून एक नवीन संकल्पना मांडली.

ईक्वल टू (=) च्या चिन्हात जशा दोन आडव्या रेषा असतात, तसेच गाउस ह्यांनी एक नवीन चिन्ह निर्माण केले, ज्यात त्यांनी तीन रेषांचा वापर केला:

$$\equiv$$

ह्या चिन्हाला म्हणतात congruency (कॉन्ग्रूएन्सी). ह्याचा शब्दशः अर्थ आहे 'सम'. ज्या संख्या 'दिसायला' एका सारख्या असतात, त्यांना गाउस ह्यांनी नाव दिले 'कॉन्ग्रूएंट संख्या'.

जर दोन संख्या एका गटात असल्या, तर त्यांना म्हणतात कॉन्ग्रूएंट संख्या. पण विविध गटात विभागणी करायची असल्यास आधी आपल्याला एक माप ठरवायला हवे. उदा., जर २ आपले माप असेल, म्हणजेच, जर २ ने भागाकार होणे ही आपली कसोटी असेल, तर ६ आणि ९ वेगवेगळ्या गटात जातील (कारण ६ सम संख्या आहे आणि ९ आहे विषम).

पण जर माप ३ असेल, तर ६ आणि ९ दोन्ही एकाच गटात येतील (दोन्ही संख्यांना ३ ने भागल्यास बाकी उरते ०).

३.१ ११ च्या आधारावर संख्यांचे किती गट करता येतील? कुठल्याही एका गटातील ५ संख्या लिहून काढा.

जर दोन संख्या एकाच गटातील असतील (कुठल्यातरी एका मापानुसार), तर त्यांना आपण कॉन्ग्रूएंट संख्या म्हणू. हे पुढीलप्रमाणे लिहिले जाते:

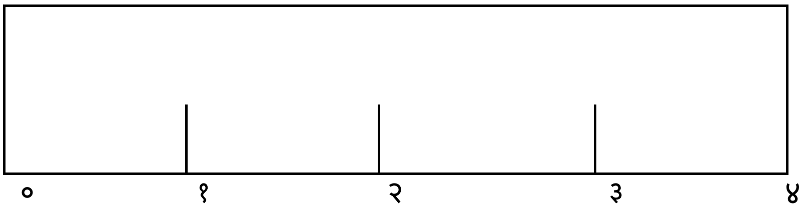
$$6 \equiv 9 \; mod \; 3$$

Mod चा अर्थ आहे ‘माप’. वरील कॉन्ग्रूएन्सी अशाप्रकारे वाचली जाते: **six congruent to nine modulo three.**

३.२ $11 \equiv 21 \; mod \; 5$ **: ही कॉन्ग्रूएन्सी बरोबर आहे का चूक? चार वेगवेगळ्या मापांचा वापर करून चार** *चुकीच्या* **कॉन्ग्रूएन्सी लिहून काढा.**

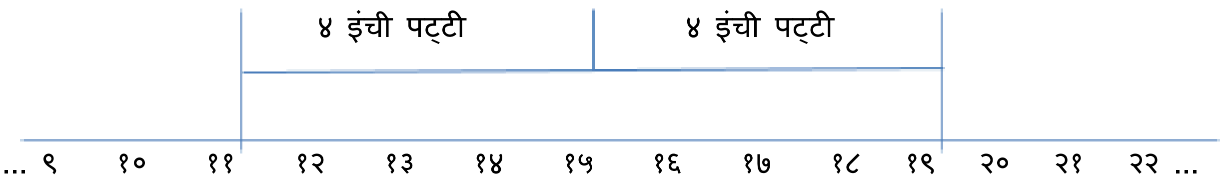
कॉन्ग्रूएन्सी ची भूमिती

असा विचार करा की मापाची संख्या एक रुलर (पट्टी) आहे. म्हणजे जर माप असेल ४ (चार), तर तुम्ही अशी कल्पना करू शकता की ती एखादी चार इंची पट्टी आहे.



दोन संख्या ४ च्या आधारावर तेव्हाच कॉन्ग्रूएंट असतील जर त्यांच्यातील अंतर ४ च्या आधारावर मापता येत असेल.

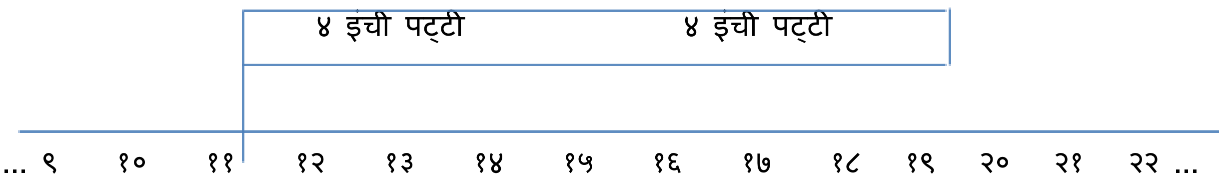
उदाहरणार्थ, ११ आणि १९. ह्या दोन संख्यांमधील अंतर आहे ८. ह्याचा अर्थ ४ इंची पट्टी दोनदा वापरून आपल्याला हे अंतर मापता येईल.



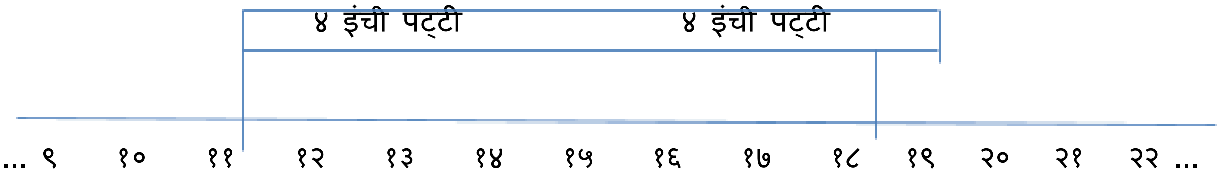
जर हे मापता आले नाही, तर त्याचा अर्थ असा होतो की त्या दोन संख्या (ह्या पट्टीच्या आधारावर) कॉन्ग्रूएंट नाहीत. हे आपण अशाप्रकारे लिहू शकतो:

$$11 \not\equiv 20 \text{ mod } 4$$

दोन उदाहरणे (दोन संख्या कॉन्ग्रूएंट नसल्याची)



( )



( )

पट्टीचे तुकडे बरोबर त्या जागेत बसत आहेत ह्याकडे लक्ष द्यावे. पट्टी संख्यांमधील अंतरापेक्षा मोठी असून चालणार नाही.

सोप्या शब्दात सांगायचे झाले तर, a व b कॉन्ग्रूएंट मॉड्युलो d ह्याचा अर्थ असा की |a-b| ला d ने भागता येते. आपण |a-b| लिहिले आहे ह्याचे कारण आपल्यासाठी केवळ त्यांच्यातील अंतर महत्त्वाचे आहे. ११ पासून १९ पर्यंत जितके अंतर आहे, १९ पासून ११ पर्यंत ही तेवढेच अंतर आहे.

(|a-b| म्हणजे (सुरुवातीला आणि शेवटी रेषा काढायचा अर्थ असा), की a-b चे उत्तर शोधून त्याचे धन मूल्य आपल्याला धरायचे आहे.

उदाहरणार्थ: |५ - ७| = २ = |७ - ५| - फक्त दोन्ही संख्यांतील अंतराचा हिशोब करायचा आहे.)

कॉन्ग्रूएन्सी चे चिन्ह दिसायला इक्वॉलिटी च्या चिन्हासारखे का आहे?

कॉन्ग्रूएन्सी (≡) आणि इक्वॉलिटी (=) मध्ये खूपसे साम्य आहे. म्हणूनच दोन्ही चिन्हे दिसायला ही थोडीफार एक सारखी आहेत.

त्यांच्यातील साम्य आपण आता बघणार आहोत. कॉन्ग्रूएन्सी साठी आपल्याला एका मापाची ही आवश्यकता आहे. असे समजा की माप आहे ‘d’.

आता साम्य बघूया:

साम्य	**=**	**≡ mod d**
रिफ्लेक्सिव्ह	कुठलीही संख्या स्वतःशी समान असते **a = a**	कुठलीही संख्या स्वतःशी मॉड्युलो d असते ***a ≡ a mod d*** असे का?

		ह्याचे कारण थोडे विचित्र वाटू शकते. **a** पासून **a** पर्यंत मापतांना **d** चे ० तुकडे बसवावे लागतात. बैजिक पद्धतीने असे म्हणता येईल की d ने a-a ला भागता येते. कारण a-a = ० आणि ० ला कुठल्याही संख्येने भागता येते.
सिमेट्रिक	जर **a = b** असेल, तर **b = a** हे ही खरे असते.	***a ≡ b mod d*** दिलेले आहे. मग ***b ≡ a mod d*** हे ही खरे असते. असे का? **a** पासून **b** पर्यंत जितके अंतर आहे, तितकेच **b** पासून **a** पर्यंत ही आहे. म्हणूनच, **a** पासून **b** पर्यंत जर **d** ने मापता येत असेल, तर **b** पासून **a** पर्यंत ही **d** ने मापता येईल. बैजिक पद्धती: **a ≡ b mod d** ह्याचा अर्थ **a-b** ला **d** ने भागता येते. अर्थात्, **a-b = dQ** (**Q** आहे भागाकार). म्हणजे **b - a = d (-Q)** म्हणजे **b - a** ला ही **d** ने भागता येते, म्हणूनच, ***b ≡ a mod d***
ट्रान्सिटिव्ह	**a=b**, **b=c** जर असेल, तर **a=c** हे ही खरे असते.	**३.३ सिद्ध करा की कॉन्ग्रूएन्सी ही ट्रान्सिटिव्ह असते. म्हणजेच, जर आपल्याला** *a ≡ b mod d* **व** *b ≡ c mod d* **माहिती असेल, तर दाखवा की** *c ≡ a mod d*. **हे आधी**

		भूमिती ची पद्धत वापरून दाखवा, व त्यानंतर बैजिक पद्धतीने सिद्ध करा.

ह्या व्यतिरिक्त ही इक्वॉलिटी आणि कॉन्ग्रूएन्सी मध्ये भरपूर साम्य आहे. ते आपण पुढच्या भागांमध्ये बघणार आहोत.

३.४ सिद्ध करा: $a \equiv b \bmod d$ **जर असेल, आणि** c **जर कुठलीही पूर्ण संख्या असेल, तर,**

- $a + c \equiv b + c \bmod d$
- $a - c \equiv b - c \bmod d$
- $ac \equiv bc \bmod d$

३.५ समजा $a \equiv b \bmod d$ **व** $m \equiv n \bmod d$. **तर सिद्ध करा की:**

- $a + m \equiv b + n \bmod d$
- $a - m \equiv b - n \bmod d$
- $am \equiv bn \bmod d$
- $a^k \equiv b^k \bmod d$ **(**k **एक धन पूर्णांक संख्या (positive integer) आहे).**